

Algunas maneras de dividir en forma justa

Francisco Sánchez Sánchez

XLVI Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana
Universidad Autónoma de Yucatán
Octubre, 2013

Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto de bienes entre un conjunto de personas.

Introducción a la división justa.

- ▶ **Problema:** Dividir un conjunto de bienes entre un conjunto de personas.

- ▶ **Ejemplos:** Dividir un pastel, una pizza, una herencia, las labores de la casa, etc.

Una posible descripción.

- ▶ Pastel: el intervalo unitario $[0, 1]$.

Una posible descripción.

- ▶ Pastel: el intervalo unitario $[0, 1]$.
- ▶ \mathcal{B} conjuntos de Borel. Los posibles pedazos del pastel.

Una posible descripción.

- ▶ Pastel: el intervalo unitario $[0, 1]$.
- ▶ \mathcal{B} conjuntos de Borel. Los posibles pedazos del pastel.
- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de personas.

Una posible descripción.

- ▶ Pastel: el intervalo unitario $[0, 1]$.
- ▶ \mathcal{B} conjuntos de Borel. Los posibles pedazos del pastel.
- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de personas.
- ▶ $\mu_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Donde $\mu_i(B)$ es la medida que la persona i le da al pedazo B .

$$\mu_i([0, 1]) = 1$$

Una posible descripción.

- ▶ Pastel: el intervalo unitario $[0, 1]$.
- ▶ \mathcal{B} conjuntos de Borel. Los posibles pedazos del pastel.
- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de personas.
- ▶ $\mu_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Donde $\mu_i(B)$ es la medida que la persona i le da al pedazo B .

$$\mu_i([0, 1]) = 1$$

- ▶ **Definición.** Una división S_1, \dots, S_n se dice justa si y sólo si $\mu_i(S_i) \geq \frac{1}{n}$ para todo $i \in N$.

Una posible descripción.

- ▶ Pastel: el intervalo unitario $[0, 1]$.
- ▶ \mathcal{B} conjuntos de Borel. Los posibles pedazos del pastel.
- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de personas.
- ▶ $\mu_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Donde $\mu_i(B)$ es la medida que la persona i le da al pedazo B .

$$\mu_i([0, 1]) = 1$$

- ▶ **Definición.** Una división S_1, \dots, S_n se dice justa si y sólo si $\mu_i(S_i) \geq \frac{1}{n}$ para todo $i \in N$.
- ▶ **Definición.** Una división S_1, \dots, S_n se dice libre de envidias si y sólo si $\mu_i(S_i) \geq \mu_i(S_j)$

Una posible descripción.

- ▶ Pastel: el intervalo unitario $[0, 1]$.
- ▶ \mathcal{B} conjuntos de Borel. Los posibles pedazos del pastel.
- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ conjunto de personas.
- ▶ $\mu_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$. Donde $\mu_i(B)$ es la medida que la persona i le da al pedazo B .

$$\mu_i([0, 1]) = 1$$

- ▶ **Definición.** Una división S_1, \dots, S_n se dice justa si y sólo si $\mu_i(S_i) \geq \frac{1}{n}$ para todo $i \in N$.
- ▶ **Definición.** Una división S_1, \dots, S_n se dice libre de envidias si y sólo si $\mu_i(S_i) \geq \mu_i(S_j)$
- ▶ **Lema.** *División libre de envidias implica división justa.*

Procedimiento partes-escoges

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].

Procedimiento partes-escoges

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
- ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]

Procedimiento partes-escoges

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
- ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]
- ▶ **Proposición.** *El procedimiento partes-escoges da una división justa, libre de envidias.*

Generalización del procedimiento partes-escoges.

Para tres personas:

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].

Generalización del procedimiento partes-escoges.

Para tres personas:

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
- ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]

Generalización del procedimiento partes-escoges.

Para tres personas:

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
- ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]
- ▶ La primera y la segunda, cada una divide su parte en tres partes [de tal manera, que de acuerdo con su criterio las tres partes sean iguales].

Generalización del procedimiento partes-escoges.

Para tres personas:

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
- ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]
- ▶ La primera y la segunda, cada una divide su parte en tres partes [de tal manera, que de acuerdo con su criterio las tres partes sean iguales].
- ▶ La tercera persona elige una de las partes de la primera persona y otra de la segunda persona [las que considera más grandes]

Generalización del procedimiento partes-escoges.

Para tres personas:

- ▶ La primera persona parte [de tal manera, que a su criterio las dos partes sean iguales].
 - ▶ La segunda persona escoge [el que considera más grande]
 - ▶ La primera y la segunda, cada una divide su parte en tres partes [de tal manera, que de acuerdo con su criterio las tres partes sean iguales].
 - ▶ La tercera persona elige una de las partes de la primera persona y otra de la segunda persona [las que considera más grandes]
-
- ▶ **Proposición.** *El procedimiento partes-escoges da una división justa.*

Procedimiento para n arbitraria (Dubins-Spanier)

- ▶ Un réferi mueve lentamente un cuchillo de izquierda a derecha

Procedimiento para n arbitraria (Dubins-Spanier)

- ▶ Un réferi mueve lentamente un cuchillo de izquierda a derecha
- ▶ Cualquiera de las personas, en cualquier momento, puede decir "alto". El réferi corta el pastel, en el lugar donde le dijeron alto. La persona que dijo alto se queda con el pedazo a la izquierda del cuchillo y sale de la repartición.

Procedimiento para n arbitraria (Dubins-Spanier)

- ▶ Un réferi mueve lentamente un cuchillo de izquierda a derecha
- ▶ Cualquiera de las personas, en cualquier momento, puede decir "alto". El réferi corta el pastel, en el lugar donde le dijeron alto. La persona que dijo alto se queda con el pedazo a la izquierda del cuchillo y sale de la repartición.
- ▶ El proceso se repite con las personas que quedan. La última persona se queda con el último pedazo.

Procedimiento para n arbitraria (Dubins-Spanier)

- ▶ Un réferi mueve lentamente un cuchillo de izquierda a derecha
- ▶ Cualquiera de las personas, en cualquier momento, puede decir "alto". El réferi corta el pastel, en el lugar donde le dijeron alto. La persona que dijo alto se queda con el pedazo a la izquierda del cuchillo y sale de la repartición.
- ▶ El proceso se repite con las personas que quedan. La última persona se queda con el último pedazo.

- ▶ **Proposición.** *El procedimiento de Dubins-Spanier da una división justa.*

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

Cada persona asigna 100 puntos.

Bien	P1	P2
1	4	22
2	10	20
3	50	25
4	21	18
5	11	10
6	4	5
	100	100

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

Cada bien se asigna al mejor postor.

Bien	P1	P2
1	4	22
2	10	20
3	50	25
4	21	18
5	11	10
6	4	5
	82	47

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ Ajuste al ganador.

Bien	P1	P2	
1	4	22	
2	10	20	
3	50	25	$\frac{50}{25} = 2$
4	21	18	$\frac{21}{18} = 1.16$
5	11	10	$\frac{11}{10} = 1.1$
6	4	5	
	82	47	

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ Ajuste al ganador.

Bien	P1	P2	
1	4	22	
2	10	20	
3	50	25	$\frac{50}{25} = 2$
4	21	18	$\frac{21}{18} = 1.16$
5	11	10	$\frac{11}{10} = 1.1$
6	4	5	
	82	47	

- ▶ Se calcula la fracción que se necesita pasar de P1 a P2.

$$82 - 11x = 47 + 10x \implies x = 1.66$$

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ Ajuste al ganador.

Bien	P1	P2	
1	4	22	
2	10	20	
3	50	25	$\frac{50}{25} = 2$
4	21	18	$\frac{21}{18} = 1.16$
5	11	10	
6	4	5	
	71	57	

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ Ajuste al ganador.

Bien	P1	P2	
1	4	22	
2	10	20	
3	50	25	$\frac{50}{25} = 2$
4	21	18	$\frac{21}{18} = 1.16$
5	11	10	
6	4	5	
	71	57	

- ▶ Se calcula la fracción que se necesita pasar de P1 a P2.

$$71 - 21x = 57 + 18x \implies x = 0.359$$

Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

Resulta.

Bien	P1	P2	
1	4	22	
2	10	20	
3	50	25	$\frac{50}{25} = 2$
4	21*0.641	18*0.359	$\frac{21}{18} = 1.16$
5	11	10	
6	4	5	
	63.46	63.46	

Propiedades del Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ **Equitativo:** Cada jugador recibe el mismo monto

Propiedades del Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ **Equitativo:** Cada jugador recibe el mismo monto
- ▶ **Libre de envidias:** Ninguno de los jugadores prefiere lo que le tocó a otro.

Propiedades del Procedimiento de Ajuste al Ganador (2 personas)

- ▶ **Equitativo:** Cada jugador recibe el mismo monto
- ▶ **Libre de envidias:** Ninguno de los jugadores prefiere lo que le tocó a otro.
- ▶ **Optima de Pareto:** No hay otra asignación de tal forma que se pueda mejorar a alguno sin empeorar a otro.

Procedimiento de Knaster para herencias

- ▶ Cada heredero por separado y en sobre cerrado da un precio para cada bien.

	H1	H2	H3	H4
Bien 1	20	40	60	120
Bien 2	24	20	32	16

Procedimiento de Knaster para herencias

- ▶ Cada heredero por separado y en sobre cerrado da un precio para cada bien.

	H1	H2	H3	H4
Bien 1	20	40	60	120
Bien 2	24	20	32	16

- ▶ Por cada bien:

Procedimiento de Knaster para herencias

- ▶ Cada heredero por separado y en sobre cerrado da un precio para cada bien.

	H1	H2	H3	H4
Bien 1	20	40	60	120
Bien 2	24	20	32	16

- ▶ Por cada bien:
 - ▶ Se vende el bien al mejor postor, al precio que él propuso.

Procedimiento de Knaster para herencias

- ▶ Cada heredero por separado y en sobre cerrado da un precio para cada bien.

	H1	H2	H3	H4
Bien 1	20	40	60	120
Bien 2	24	20	32	16

- ▶ Por cada bien:
 - ▶ Se vende el bien al mejor postor, al precio que él propuso.
 - ▶ Se le da $\frac{P_i}{n}$ a cada heredero i . P_i es el precio que i propuso.

Procedimiento de Knaster para herencias

- ▶ Cada heredero por separado y en sobre cerrado da un precio para cada bien.

	H1	H2	H3	H4
Bien 1	20	40	60	120
Bien 2	24	20	32	16

- ▶ Por cada bien:
 - ▶ Se vende el bien al mejor postor, al precio que él propuso.
 - ▶ Se le da $\frac{P_i}{n}$ a cada heredero i . P_i es el precio que i propuso.
 - ▶ El resto se divide en partes iguales.

Procedimiento de Knaster para herencias

Para el primer bien:






20	40	60	120
			-120
5	10	15	30
15	15	15	15
20	25	30	-75+Bien 1

Procedimiento de Knaster para herencias

Para el otro bien:

24	20	32	16
		-32	
6	5	8	4
2.25	2.25	2.25	2.25
8.25	7.25	-21.75	6.25

Bibliografía

-  Austin, A.K. (1982) Sharing a cake. Math Gaz 6 437:212-215.
-  Brams S.J., Taylor A.D. (1996) Fair division - From cake-cutting to dispute resolution. Cambridge University Press.
-  Neyman J. (1946) Un theoreme d'existence. C.R. Acad Sci Paris 222:843-845.
-  Steinhaus H. (1948) The problem of fair division. Econom 16:101-104.
-  Stromquist W. (1980) How to cut a cake fairly. Am Math Mon 87:640 -644.